15 ОПЕРАЦИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕРДІҢ ЭЛЕКТР ТІЗБЕКТЕРІ ТЕОРИЯСЫНДА ҚОЛДАНЫЛУЫ

15.1 Тоқ күші мен зарядты анықтау

Тізбектеп қосылған L индукциясынан, R кедергісінен және C сыйымдылығынан тұратын электр тізбегіне $t=0$ бастапқы сәтінде $E(t)$ электр қозғаушы күші (ЭҚК) қосылған. $I(t)$- тоқ күшімен $Q(t)$- конденсатор заряды $I(0)=I_0$, $Q(0)=Q_0$ бастапқы шарттарын қанағаттандырады. Конденсатор заряды мен тоқ күшін анықтау керек.

Шешімі: $I(t)$ тоқ күшімен $Q(t)$ зарядының

$$\begin{cases} L\dfrac{dI}{dt}+RI+\dfrac{Q}{C}=E & (15.1)\\ \dfrac{dQ}{dt}=I & (15.2)\end{cases}$$

теңдеулерін қанағаттандыратыны электр техникасы теориясынан белгілі. $I(t)\div\bar{I}(p), Q(t)\div\bar{Q}(p)$ және $E(t)\div\bar{E}(p)$ деп ала отырып (15.1), (15.2) теңдеулерінен операторлық теңдеулерге көшеміз:

$$(Lp+R)\bar{I}(p)+\frac{1}{C}\bar{Q}(p)=\bar{E}(p)+LI_0, \tag{15.3}$$

$$p\bar{Q}(p)=\bar{I}(p)+Q_0 \tag{15.4}$$

Екінші теңдеуден $\bar{I}(p)$ функциясын өрнектен алып бірінші теңдеуге қою арқылы $\bar{Q}(p)$ функциясын тауып аламыз:

$$\bar{Q}(p)=\frac{L(Q_0p+I_0)+RQ_0}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}+\frac{\bar{E}(p)}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}$$

немесе

$$\bar{Q}(p)=\frac{Q_0p+I_0+\frac{RQ_0}{L}}{\left(p+\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}+\frac{1}{L}\frac{\bar{E}(p)}{\left(p+\frac{R}{2L}\right)^2+\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}} \tag{15.5}$$

$Q(t)$ зарядын табу үшін (15.5) теңдігінде түпнұсқаға көшу жеткілікті. Бірақ, бұл теңдіктің оң жағының түпнұсқасы $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}$ санының таңбасына қарай анықталатын болғандықтан $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}>0,$ $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}=0$ және $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}<0$ жағдайларын жеке-жеке қарастырамыз.

1) $\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}>0$ жағдайы.

(6.29) теңдігінің оң жағын түпнұсқаға көшуге қолайлы

$$\overline{Q}(p)=Q_0\frac{p+\dfrac{R}{2L}}{\left(p+\dfrac{R}{2L}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}\right)^2}+\frac{I_0+\dfrac{Q_0R}{2L}}{\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}}\cdot\frac{\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}}{\left(p+\dfrac{R}{2L}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}\right)^2}$$

$$+\frac{1}{L}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}}\cdot\overline{E}(p)\cdot\frac{\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}}{\left(p+\dfrac{R}{2L}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}\right)^2} \qquad (15.6)$$

түрінде жазып алып, Лаплас түрлендіруінің сызықтылық қасиетін, кескіндердің көбейтіндісі туралы (12.7) сәйкестігін және негізгі түпнұсқалар мен олардың кескіндерінің кестесін қолдана отырып $Q(t)$ зарядын табамыз:

$$Q(t)=e^{-\frac{R}{2L}t}\left(Q_0\cos\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t+\frac{I_0+\dfrac{Q_0R}{2L}}{\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}}\sin\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t\right)$$

$$+\frac{1}{L}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}}\int_0^t E(t-\tau)e^{-\frac{R}{2L}(\tau)}\sin\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}(\tau)d\tau. \qquad (15.7)$$

2) $\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}=0$ жағдайы.

Бұл жағдайда (6.29) теңдігі

$$\overline{Q}(p)=Q_0\frac{1}{p+\dfrac{R}{2L}}+\left(I_0+\frac{Q_0R}{2L}\right)\frac{1}{\left(p+\dfrac{R}{2L}\right)^2}+\frac{1}{L}\overline{E}(p)\frac{1}{\left(p+\dfrac{R}{2L}\right)^2}$$

түріне келеді де $Q(t)$ заряды төмендегідей анықталады:

$$Q(t)=Q_0e^{-\frac{R}{2L}t}+\left(I_0+\frac{Q_0R}{2L}\right)te^{-\frac{R}{2L}t}+\frac{1}{L}\int_0^t E(t-\tau)(\tau)e^{-\frac{R}{2L}(\tau)}d\tau. \qquad (15.8)$$

3) $\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}<0$ жағдайы.

Бұл жағдайда (15.5) теңдігі

$$\overline{Q}(p)=Q_0\frac{p+\dfrac{R}{2L}}{\left(p+\dfrac{R}{2L}\right)^2-\left(\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2}-\dfrac{1}{LC}}\right)^2}+\frac{I_0+\dfrac{Q_0R}{2L}}{\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2}-\dfrac{1}{LC}}}\cdot\frac{\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2}-\dfrac{1}{LC}}}{\left(p+\dfrac{R}{2L}\right)^2+\left(\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2}-\dfrac{1}{LC}}\right)^2}+$$

$$+\frac{1}{L}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2}-\dfrac{1}{LC}}}\cdot\overline{E}(p)\cdot\frac{\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2}-\dfrac{1}{LC}}}{\left(p+\dfrac{R}{2L}\right)^2-\left(\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2}-\dfrac{1}{LC}}\right)^2}$$

түріне келеді де $Q(t)$ заряды төмендегідей анықталады:

$$Q(t)=e^{-\frac{R}{2L}t}\left(Q_0 ch\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}t+\frac{I_0+\frac{Q_0R}{2L}}{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}sh\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}t\right)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}\int_0^t E(t-\tau)e^{-\frac{R}{2L}(\tau)}sh\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}(\tau)d\tau. \qquad (15.9)$$

Сонымен біз $Q(t)$ зарядын анықтаудың келесі схемасын алдық: L индукция, R кедергі және C сыйымдылық, $E(t)$ - ЕҚК, $I(t)$ - тоқ күші, $Q(t)$ - конденсатор заряды, $Q(0)=Q_0$, $I(0)=I_0$ $(Q'(0)=Q'_0)$,

$\mu=\frac{R}{2L}$, $\nu=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}$.

Кесте 1.

Жағдай	Конденсатор заряды
$\nu>0$	$Q(t)=e^{-\mu t}\left(Q_0\cos\sqrt{\nu}t+\frac{I_0+Q_0\mu}{\sqrt{\nu}}\sin\sqrt{\nu}t\right)+\frac{1}{L\sqrt{\nu}}\int_0^t E(t-\tau)e^{-\mu(\tau)}\sin\sqrt{\nu}(\tau)d\tau.$
$\nu=0$	$Q(t)=Q_0e^{-\mu t}+(I_0+Q_0\mu)te^{-\mu t}+\frac{1}{L}\int_0^t E(t-\tau)(\tau)e^{-\mu(\tau)}d\tau.$
$\nu<0$	$Q(t)=e^{-\mu t}\left(Q_0ch\sqrt{-\nu}t+\frac{I_0+Q_0\mu}{\sqrt{-\nu}}sh\sqrt{-\nu}t\right)+\frac{1}{L\sqrt{-\nu}}\int_0^t E(t-\tau)e^{-\mu(\tau)}sh\sqrt{-\nu}(\tau)d\tau.$

Бұл схемадан (15.2) теңдігі негізінде $I(t)$ тоқ күшін табудың келесі схемасын аламыз.

Кесте 2.

Жағдай	$I(t)$ - тоқ күші
$\nu>0$	$I(t)=I_0e^{-\mu t}\cos\sqrt{\nu}t-\frac{1}{\sqrt{\nu}}\left(I_0\mu+\frac{Q_0}{LC}\right)e^{-\mu t}\sin\sqrt{\nu}t+\frac{1}{L\sqrt{\nu}}\int_0^t E(t-\tau)e^{-\mu\tau}\left(\sqrt{\nu}\cos\sqrt{\nu}t-\mu\sin\sqrt{\nu}\tau\right)d\tau.$
$\nu=0$	$I(t)=I_0e^{-\mu t}-\left(I_0\mu+\frac{Q_0}{LC}\right)te^{-\mu t}+\frac{1}{L}\int_0^t E(t-\tau)e^{-\mu\tau}(1-\mu\tau)d\tau.$
$\nu<0$	$I(t)=e^{-\mu t}\left[I_0ch\sqrt{-\nu}t-\frac{I_0\mu+\frac{Q_0}{LC}}{\sqrt{-\nu}}sh\sqrt{-\nu}t\right]+\frac{1}{L\sqrt{-\nu}}\int_0^t E(t-\tau)e^{-\mu\tau}\left(\sqrt{-\nu}ch\sqrt{-\nu}\tau-\mu sh\sqrt{-\nu}\tau\right)d\tau.$

15.2 Жеткілікті ұзын электр желісі туралы есеп

Бұл есепті зерттеген операциялық есептеулердің негізін салушылардың бірі – О. Хевисайд. Екі өткізгішті ұзын электр желісін кедергілер, индуктивтіліктер, сыйымдылықтар және ағынның біркелкі таратылған жүйесі ретінде қарастырамыз: олардың ұзындық бірлігіне келетін шамаларын сәйкесінше R, L, C, G арқылы белгілейміз.

Желідегі $I=I(x,t)$ тоғы және $E=E(x,t)$ кернеуі t уақытынан және желі бойында $x=0$ басына дейінгі x арақашықтығынан тәуелді. Бұл функциялар электр динамикасынан белгілі бірінші ретті дербес туындылы екі теңдеулер жүйесін қанағаттандырады:

$$-\frac{\partial E}{\partial x}=L\frac{\partial I}{\partial t}+RI,$$
$$-\frac{\partial I}{\partial x}=C\frac{\partial E}{\partial t}+GE. \qquad (15.10)$$

$I_0=I_0(x)=I(x,0)$ және $E_0=E_0(x)=E(x,0)$ тоқ пен қысымның $t=0$ сәтіндегі бастапқы мәндері болсын. (15.10) теңдеулеріне t айнымалысы бойынша Лаплас түрлендіруін қолданамыз: p параметр рөлін атқарады; түпнұсқаның x бойынша дифференциалдануына кескіннің x бойынша дифференциалдануы сәйкес келеді. Нәтижесінде операторлық теңдеулердің жүйесін аламыз:

$$-\frac{\partial \overline{E}}{\partial x}+LI_0=(Lp+R)\overline{I}$$
$$-\frac{\partial \overline{I}}{\partial x}+CE_0=(Cp+G)\overline{E}, \qquad (15.11)$$

мұндағы $\overline{I}=\overline{I}(x,p)$ және $\overline{E}=\overline{E}(x,p)$ тоқ пен кернеудің кескіндері. Жүйеден $\overline{I}$ операторлық тоғын шегере отырып операторлық қысым үшін келесі теңдеуді аламыз:

$$-\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial x^2}-\gamma^2\overline{E}=L\frac{dI_0}{dx}-C(Lp+R)E_0, \qquad (15.12)$$

мұндағы $\gamma=\sqrt{(Lp+R)(Cp+G)}$, $\operatorname{Re}\gamma>0$ кернеу толқынының желі бойымен таратылу коэффициенті. Қарапайымдылық үшін $I_0\equiv E_0\equiv 0$ деп аламыз. Онда (15.12) теңдеуінің оң жағы нөлге тең болады да, алынған біртекті сызықтық теңдеудің шешімі

$$\overline{E}=A(p)e^{-\gamma x}+B(p)e^{\gamma x} \qquad (15.13)$$

түрінде жазылады.

E операторлық кернеуінің (15.13) мәнін (15.11) теңдеулерінің бірінші теңдеуіне қою арқылы $\overline{I}$ операторлық тоғын анықтаймыз:

$$\overline{I}=\frac{1}{Z}\left(Ae^{-\gamma x}+Be^{\gamma x}\right), \qquad (15.14)$$

мұндағы $Z=\sqrt{\dfrac{Lp+R}{Cp+G}}$ желінің сипаттамалық кедергісі.

Толығырақ тек $0\le x\le+\infty$ шексіз ұзын желі жағдайын, яғни желінің ұшынан жаңғырығып қайтатын толқындарды ескермеуге болатын қарапайым жағдайын қарастырайық. $\overline{I}$ және $\overline{E}$ барлық жерде шектелген деп есептейміз. Бұл жағдайда $B=0$ болады да (15.13)және (15.14) теңдіктерінен

$$\overline{E}=Ae^{-\gamma x},$$
$$\overline{I}=\frac{A}{Z}e^{-\gamma x} \qquad (15.15)$$

болатынын аламыз.

Шығынсыз желі жағдайында $R = G = 0,\ \gamma = p\sqrt{LC} = \frac{p}{v}$, мұндағы $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - толқынның таратылу жылдамдығы, . Бұл жағдайда (15.15) формулалары

$$\overline{E}(x,\ p) = Ae^{-\frac{x}{v}p},$$

$$\overline{I}(x,\ p) = \sqrt{\frac{C}{L}}Ae^{-\frac{x}{v}p}.$$

теңдіктерін береді. Бірінші теңдіктен $A = \overline{E}(0,\ p)$ теңдігін, яғни A - электр қозғаушы күштің (ЭҚК) кескіні болатынын аламыз. Электр қозғаушы күшті $f(t)$ деп алсақ, онда кешігу теоремасы бойынша

$$E(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

$$I(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}}f\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

яғни шығынсыз желі бойы тоқ пен кернеу толқындары түрлерін сақтай отыра таратылатынын аламыз.

Бұрмаланбаған желі

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} = \delta$$

шартымен сипатталады. Бұдан

$$\gamma = \frac{p + \delta}{v}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Z = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Кескіндер (15.15) формуласы бойынша

$$\overline{E} = Ae^{-\frac{x}{v}(p+\delta)},$$

$$\overline{I} = \sqrt{\frac{C}{L}}Ae^{-\frac{x}{v}(p+\delta)}.$$

түрлерінде анықталады.

Демек, ЭҚК $f(t)$ болса, онда

$$E(x, t) = e^{-\delta\frac{x}{v}}f\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

$$I(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}}e^{-\delta\frac{x}{v}}f\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

яғни тоқ пен кернеу толқындары бұрмаланбаған желі бойымен $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ жылдамдығымен таралады және бара-бара өшу орын алады.

Бұл мысал операторлық әдістің электр техникасы есептерін шешуде қолданысын ғана емес, сондай-ақ, олардың толық зерттелуін жеңілдететінін көрсетеді.